令和7年度(令和7年4月入学)
博士前期課程(修士課程)一般入試(第Ⅰ期)
機械物理学専攻
機械設計学専攻

数　　　学 (90分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子(この冊子)を開いてはいけません。
2. 配布物は，この問題冊子1部，解答用紙3枚と計算用紙1枚です。
3. **解答用紙には志望専攻名，受験番号を記入する欄がそれぞれ1箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙(合計3枚)の志望専攻名欄と受験番号欄に志望専攻名と受験番号を記入しなさい。**
4. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。解答用紙，計算用紙の追加，交換はしません。**
5. **問題は全部で3問あり，2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。**
6. 問題冊子の白紙と余白は，計算などに使用してもよろしい。
7. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
8. 問題冊子と計算用紙は，持ち帰りなさい。

1 (1) a を実数とする。数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，5 つのベクトル

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を V とする。V の次元 $\dim V$ を求めよ。

(2) s, t, および b を実数とする。実 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix}5 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

を考える。実 2 次正則行列 P が等式

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}s & 0\\b & t\end{pmatrix}$$

を満たすとする。

(a) 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の一次変換 $T_A\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ。

(b) s と t の値を求めよ。

(c) P, b を一組求めよ。

2 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$ を求めよ。

(2) xy 平面上の関数 $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^2$ の極値をすべて求めよ。

3　a を正の実数とする。$\mathbb{R}$ 上の関数 $y = y(x)$ に関する次の 3 階の微分方程式 $(*)$ を考える。

$$(*) \quad y''' - 3y'' + (3 - a^2)y' + (a^2 - 1)y = 0$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$(*)$ の一般解 y を求めよ。

(2)　$(*)$ の解 y のうち，以下の 2 条件

(i)　$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$

(ii)　$y(0) > 0$

を満たすものが存在するとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

（以上）

令和７年度　大学院工芸科学研究科博士前期課程（修士課程）

一般入試第Ⅰ期

入学試験学力検査問題

機械物理学専攻
機械設計学専攻

専門科目

注　意

（１）問題番号［１］～［８］の中から４問を選択すること。選択した問題番号を解答用紙左上の［　］に必ず記入し、その問題番号の解答を解答用紙に記入すること。

（２）解答用紙には、受験番号、問題番号と解答のみを記入すること。
その他のことを記入してあるものは無効とする。

（３）解答を解答用紙裏面に書かないこと。

令和６年８月20日

［1］　図１－１のように，左端が剛体壁に固定された長さ L，厚さ t，高さ b の板に，幅 w，高さ h の切欠きが設けられている．この板の右端面の中央に引張荷重 P が作用する状態を考える．ここで，切欠き部中央の上端および下端をそれぞれ B および C，それらの中央を G とする．板の長手方向，板厚方向および高さ方向をそれぞれ x 方向，y 方向および z 方向として，以下の問いに答えなさい．ただし，重力および応力集中の影響は考えないものとする．また，板の長さ L は十分長いものとする．

(1) 切欠き部の断面二次モーメント I を求めなさい．

(2) 位置 G に生じる x 方向の垂直応力 σ_G を求めなさい．

(3) 引張荷重 P の偏心によって切欠き部に生じる曲げモーメント M を求めなさい．

(4) 位置 B および C に生じる x 方向の垂直応力 σ_B および σ_C を求めなさい．

図１－２は x－z 平面における位置 G の微小領域である．

(5) 位置 G における x－z 面に関するモールの応力円を描き，そこに円の中心座標および円と σ 軸との交点の座標を示しなさい．

(6) 図１－２のように，z 方向から反時計方向に角度 θ 傾斜した方向の断面に作用する垂直応力 σ_θ およびせん断応力 τ_θ を求めなさい．

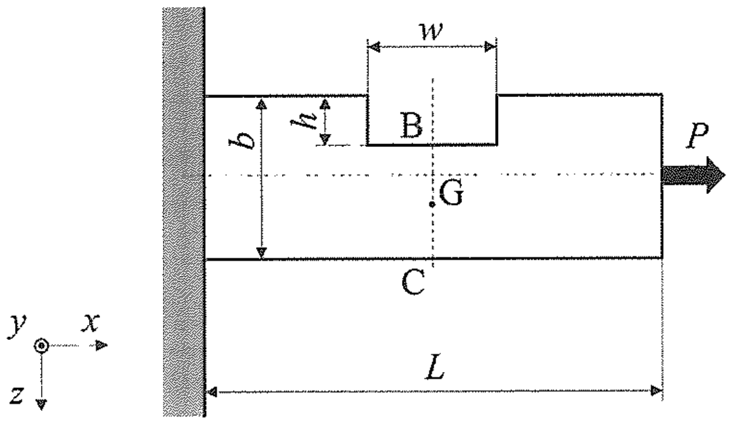

図１－１

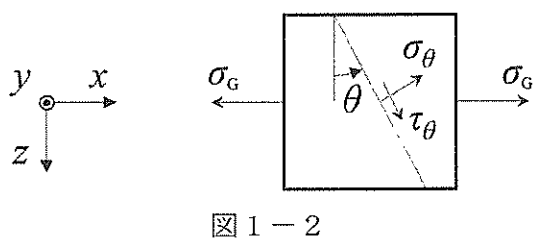

図１－２

［2］　左端 A が剛体壁に固定された長さ L，内径 D_0 および外径 D の中空丸軸がある．この中空丸軸の剛性率を G_1 とするとき，以下の問いに答えなさい．なお，重力の影響は考えないものとする．

(1) 中空丸軸の断面二次極モーメント I_1 を求めなさい．

以下では，中空丸軸の断面二次極モーメントを I_1 として答えなさい．

(2) 図２－１のように，中空丸軸の右端 B に大きさ T のねじりモーメントを与えた．中空丸軸の右端 B における左端 A に対するねじれ角の大きさを求めなさい．

次に図２－２のように左端 A から距離 $2L/3$ にある断面 C に T とは逆向きで大きさ S のねじりモーメントを加えた．

(3) 中空丸軸の断面 C における左端 A に対するねじれ角の大きさを T と S を用いて表しなさい．

(4) 中空丸軸の右端 B における左端 A に対するねじれ角の大きさは 0 であった．S を T のみを用いて表しなさい．

問(4)の状態から，続けて図２－３のように中空丸軸の中空部と同じ大きさで剛性率 G_2 の中実丸軸を挿入し，剛体壁および中空丸軸と接着した．その後，図２－４のように大きさ T および S のねじりモーメントを取り除いた．このとき，中空丸軸と中実丸軸はそれぞれ断面形状不変のまま，一体として回転したものとする．なお，中実丸軸の断面二次極モーメントを I_2 で表すこととする．

(5) A－C 間の左端 A から距離 x にある断面について，中実丸軸の左端 A に対するねじれ角の大きさが θ_x であるとき，中空丸軸の左端 A に対するねじれ角の大きさを θ_x を含む式で表しなさい．

(6) 中実丸軸の断面 C における左端 A に対するねじれ角の大きさを求めなさい．

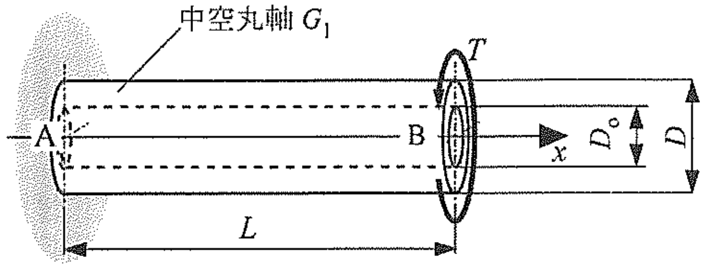

図２－１

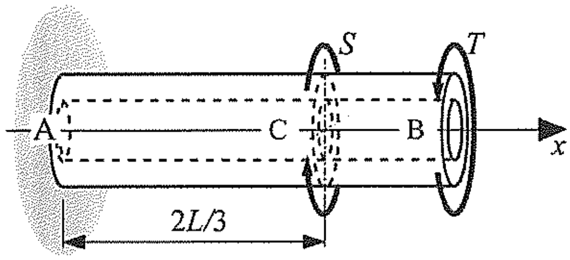

図２－２

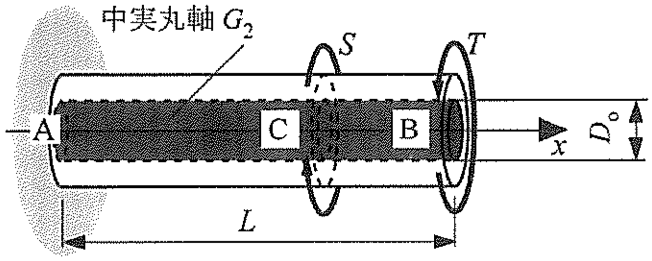

図２－３

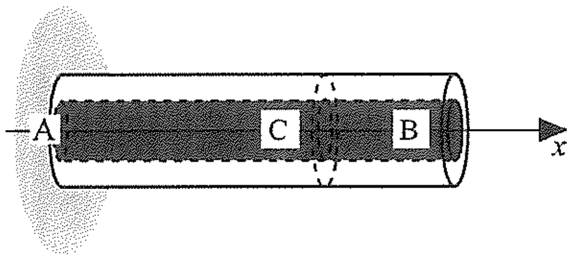

図２－４

［３］　一辺の長さが L で質量が M の正三角形の一様な板がある．この三角形の板の頂点 O をピンで留め，物理振り子を作った．支点の摩擦や空気抵抗などの減衰要素は無視できるものとする．重力加速度を鉛直下向きに g とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) この板の重心 G の，点 O からの距離を L を用いて表しなさい．

(2) つり合い状態から反時計回りの回転角を θ とするとき，回転中心 O まわりのモーメントを答えなさい．なお，モーメントも反時計回りを正とする．

(3) 頂点 O まわりの慣性モーメントを I_0 とする．$|\theta|$が十分に小さいと仮定したとき，この物理振り子の θ に関する運動方程式を記述しなさい．

(4) 固有円振動数，固有振動数および固有周期を記述しなさい．

(5) 時刻 $t=0$ の回転角および角速度をそれぞれ $\theta(0)=\theta_0$，$\dot{\theta}(0)=\omega_0$ とするとき，回転角 $\theta(t)$を θ_0，ω_0 を用いて余弦関数で表しなさい．なお，固有円振動数はω_nとして問(4)の答えを代入する必要はない．また，$|\theta|$は十分に小さいと仮定する．

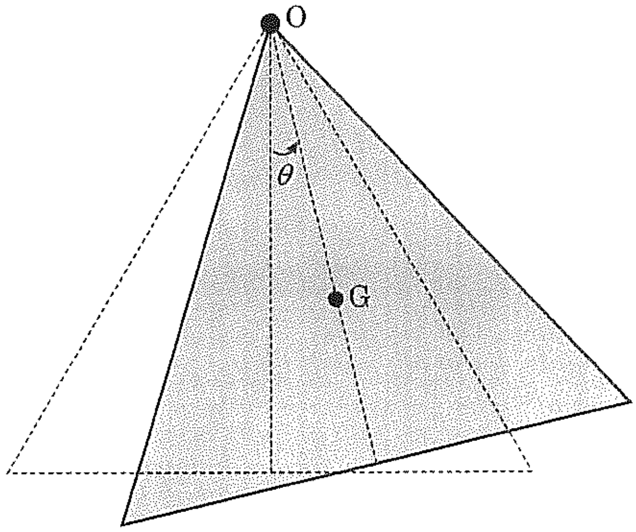

図３－１

［4］　サスペンションを有する自動車として質量 m のおもりがばね定数 k のばねと減衰係数 c のダッシュポットによって支持されている図４－１に示した簡易なモデルがある．しかしながらサスペンションに利用されるダンパーの内部は，減衰弁を通過するオイルのみならず，圧縮されたガスも充填されているため，図４－２に示したように減衰係数 c のダッシュポットにばね定数 k_c のばねが直列に接続されたモデルで表現されることもある．おもりの上下方向の絶対変位を x，ばねとダンパーの接続部の上下方向の絶対変位を y，路面の上下方向の絶対変位を z，時間を t とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 変位励振を受ける図４－１の系の運動方程式を求めなさい．

(2) 図４－１の系の固有円振動数 ω_n および減衰比 ζ を求めなさい．

(3) 振幅 Z , 円振動数 ω の変位励振 $z(t) = Z\cos\omega t$ を受ける図４－１の系のおもりの定常絶対変位応答 $x(t) = X\cos(\omega t - \phi)$ を求めなさい．ここで X はおもりの変位振幅であり，ϕ は変位励振 $z(t)$ に対する位相を表す．

(4) 図４－１の系について，入力の円振動数 ω が固有円振動数 ω_n の$\sqrt{2}$倍となる場合の振幅比 X/Z を求めなさい．

(5) 図４－２の系の運動方程式を求めなさい．

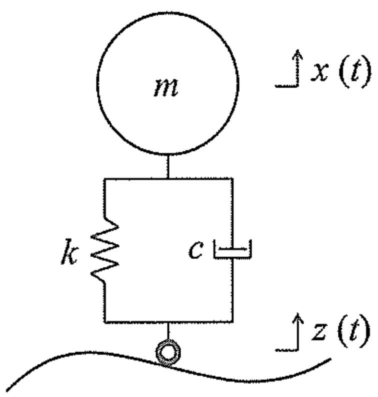

図４－１

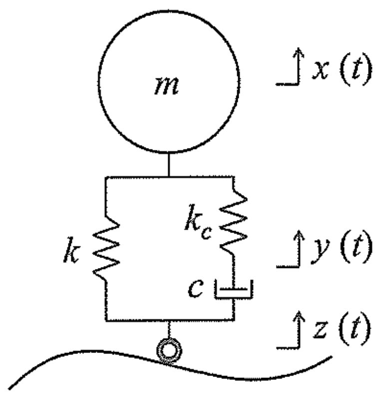

図４－２

[5]　理想気体とみなせる空気の状態変化を考える．空気の圧力をp，比体積をv，温度をT，比エントロピーをs，比エンタルピーをh，定圧比熱をc_{p}，比熱比をκとする．以下の問いに答えなさい．

はじめに，$T-s$線図と$h-s$線図での空気の等圧線を考える．

(1) $T-s$線図での等圧線の傾きをTとc_{p}を用いて求めなさい．

(2) $h-s$線図での等圧線の傾きをTを用いて求めなさい．

つぎに図５－１の模式図に示すような，圧縮機と冷却器から構成される系を用いて，温度増加を抑えながら空気を圧縮することを考える．空気は連続的に状態を変えながら流れており，状態変化は準静的な可逆変化である．系は定常状態にある．状態変化前後での空気の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの変化は無視できる．状態 1 の空気は，圧縮機 1 で断熱圧縮されて状態 2 に至る．さらに冷却器で等圧冷却された後に，空気は状態 3 で圧縮機 2 に供給され，断熱圧縮されて状態 4 に至る．ここで状態i　($i=1, 2, 3, 4$) は図５－１中に示した数字の位置と対応する．状態 1 での温度をT_1，圧力をp_1とする．状態 2 での圧力をp_2とする．また，冷却器では空気はT_1まで冷却される ($T_3=T_1$)．状態 4 での圧力をp_4とする．空気のc_{p}とκはそれぞれ一定とする．

(3) 圧縮機 1 で単位質量あたりの空気になされる仕事をW_{12}とする．W_{12}をp_1，p_2，T_1，c_{p}，κの中から必要なものを用いて表しなさい．

(4) 冷却器で単位質量あたりの空気になされる仕事をW_{23}とする．W_{23}をp_1，p_2，T_1，c_{p}，κの中から必要なものを用いて表しなさい．

(5) 圧縮機 2 で単位質量あたりの空気になされる仕事をW_{34}とする．W_{34}をp_1，p_2，p_4，T_1，c_{p}，κの中から必要なものを用いて表しなさい．

(6) 系で単位質量あたりの空気になされる全仕事をW_{14}とする．ここでp_1とp_4を固定してp_2を変化させた場合，W_{14}はあるp_2にて極小値をとる．このときのp_2をp_1とp_4を用いて表しなさい．

(7) p_2が問(6)の条件を満たす場合での状態 1 から状態 4 までの状態変化を$p-v$線図，$T-s$線図，$h-s$線図に示しなさい．ただし，図においては状態 1，2，3，4 の位置を，それらの相対的位置関係が正しくなるように記入しなさい．

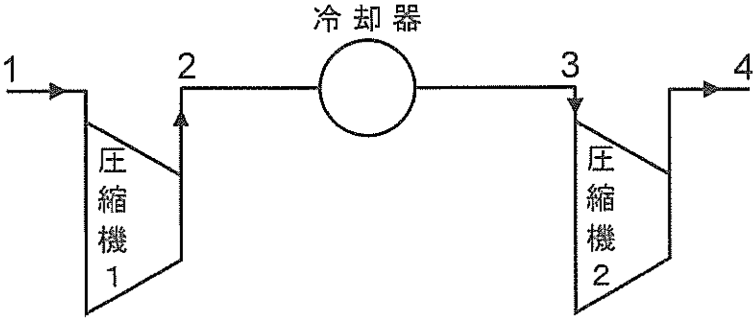

図５－１

［6］　理想気体を作動流体とする理想的なディーゼルサイクルとブレイトンサイクルを考える．ディーゼルサイクルは断熱圧縮，等圧加熱，断熱膨張，等積冷却の４つの可逆過程で構成され，ブレイトンサイクルは断熱圧縮，等圧加熱，断熱膨張，等圧冷却の４つの可逆過程で構成される．いま，圧縮開始時の気体の温度と圧力，サイクルの最高圧力と最高温度は，２つのサイクルで同一である．ディーゼルサイクルの圧縮開始時の気体温度を T_1，圧縮比（圧縮後に対する圧縮前の気体体積の比率）を 16，締切比（加熱前に対する加熱後の気体体積の比率）を 2.25 とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，理想気体の比熱は温度に依存せず一定であるとし，比熱比は 1.5 とする．数値を用いて解答する場合は整数または小数を用い，小数は小数点以下 2 桁まで求めなさい．

(1) ディーゼルサイクルの圧縮終了時における気体の温度を求めなさい．
(2) ディーゼルサイクルの加熱終了時における気体の温度を求めなさい．
(3) ディーゼルサイクルの膨張終了時における気体の温度を求めなさい．
(4) ディーゼルサイクルの理論熱効率を求めなさい．
(5) ブレイトンサイクルの膨張終了時における気体の温度を求めなさい．
(6) ブレイトンサイクルの理論熱効率を求めなさい．
(7) ディーゼルサイクルとブレイトンサイクルの$T-s$線図（T：温度，s：比エントロピー）を重ねて描きなさい．ただし，ディーゼルサイクルは実線，ブレイトンサイクルは破線で示しなさい．

［７］　図７―１のように，断面積A_1を有する容器の側面に接続された管より，液体が定常的に流出している．この接続管の水平部の断面積はA_2，鉛直部の断面積はA_3となっており，A_2とA_3は等しい．接続管から液面までの高さはh_1であり，また，鉛直部の管の長さはh_2となっている．断面積A_3の管の出口より流速u_3で大気中へ流出する液体は，出口からh_3だけ落下した位置において断面積A_4，流速u_4となる．一方，容器の上方に設置されている断面積A_0の管より，出口流速u_0で容器に液体を供給しており，容器の液面高さは常に一定となっている．このとき，以下の問いに答えなさい．ただし，重力加速度をg，液体の密度をρ，大気圧をP_aとする．また，液体は完全流体とみなし，摩擦や空気抵抗などによるエネルギー損失は全て無視できるものとする．

(1) u_3を用いてu_0を表しなさい．

(2) h_1を用いてu_3を表しなさい．

(3) 容器に接続された管の水平部における流速と圧力を，それぞれu_2とp_2とする．u_3を用いて流速u_2を表しなさい．また，h_2を用いて圧力p_2を表しなさい．

(4) u_4およびA_4を，それぞれh_1，h_2およびh_3を用いて表しなさい．

その後，図７―２のように上方に設置された管からの液体の供給を止めると，接続管出口からの流速および接続管出口からの容器の液面高さが減少した．

(5) 接続管出口からの流速が，供給停止前から半減したときの液面高さをHとするとき，h_1およびh_2を用いてHを表しなさい．

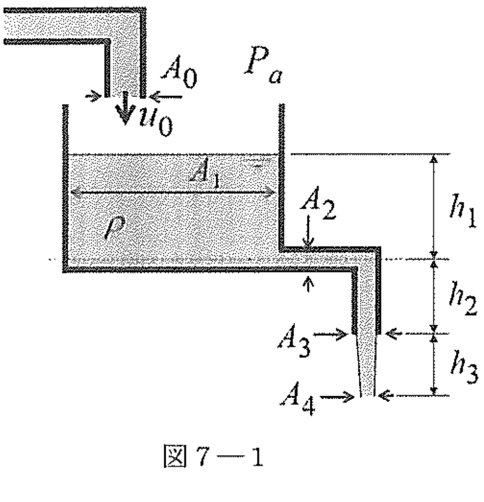

図７―１

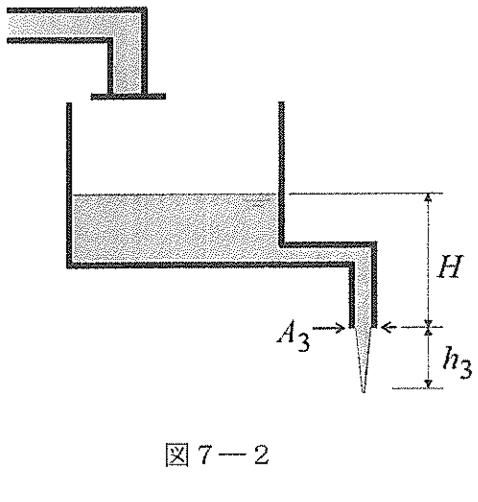

図７―２

［8］　図8－1に示すような，2次元円柱まわりの流れを考える．円柱の直径は L であり，流れ方向に x 軸を，それと垂直に y 軸をとる．検査空間ABCDにおいて，円柱は y 軸方向中央に位置し，辺ADから x 軸に平行な流速 U の一様流を与えたとき，円柱には，奥行き方向に単位長さあたりの流体力 $\boldsymbol{F}(F_x, F_y)$が作用し，円柱後方にカルマン渦列が観測された．この渦列は規則的に配列され，渦列間距離 b とピッチ l の比が 0.28 であり，渦対の放出周波数は f であったと仮定する．また，検査空間ABCDの辺BCから流出した流速分布の x 方向成分は $u(y)$であり，辺ABと辺CDから流出した流速分布の x 方向成分は U，y 方向成分はそれぞれ$-v(x)$と $v(x)$であった．流体を非圧縮性粘性流と仮定し，流体の密度をρ，流体の粘性係数をμ，代表長さをL，代表速度を U とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) レイノルズ数 Re をρ，μ，L，U を用いて表しなさい．

(2) レイノルズ数 $Re = 24000$，渦対の放出周波数 $f = 120$ Hz のとき，一様流の流速 U を求めなさい．ただし，$\rho = 1.0\ \mathrm{kg/m^3}$，$\mu = 1.0 \times 10^{-5}$ Pa·s とする．また，ストローハル数 St は $St = fL/U$ で定義され，$St = 0.2$ とする．

(3) 問(2)で求めた値を用いて，渦列間距離 b と円柱の直径 L の比 b/L を求めなさい．ただし，渦のピッチ l が $l = U/(2f)$で表されるとする．

(4) 検査空間に流入・流出する質量流量が等しく，次式が成り立つと仮定する．このとき，これと同様にして，単位時間あたりに流入・流出する運動量の x 方向成分の関係を示しなさい．ただし，奥行き方向を単位長さとする．

$$\rho \int_{y_0}^{y_1} U\, dy = \rho \int_{y_0}^{y_1} u(y)\, dy + 2\rho \int_{x_0}^{x_1} v(x)\, dx$$

(5) 問(4)の関係を用いて，次式を導出しなさい．

$$F_x = \rho \int_{y_0}^{y_1} u(y)\{U - u(y)\}\, dy$$

(6) 問(2)で求めた値を用いて，円柱の抵抗係数 C_D の値を求めなさい．ただし，円柱の抵抗係数 C_D が $C_D = 2F_x/(\rho U^2 L)$で表され，$F_x = 1.44$ N/m とする．

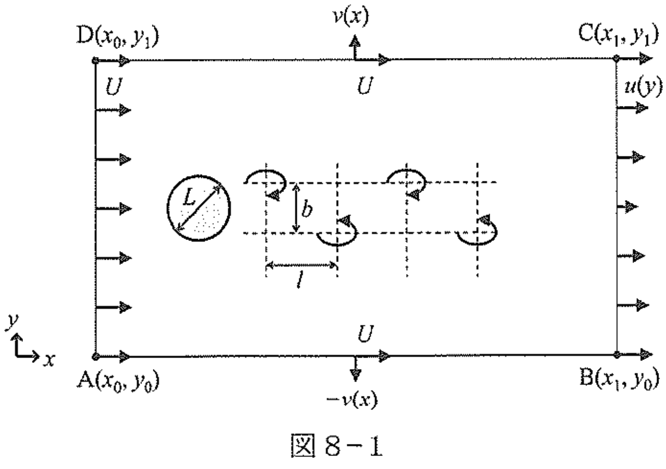

図8－1